241. 或種ノ積分方程式ニ就イテ(III)

泉　信一(東北大)　北川敏男(阪大)

§4. 積分方程式 $f^{(n)}(x)=\sum_{K=0}^{n-1}\int_a^b f^{(K)}(x+t)\,d\varphi_K(t)$ ニツイテ

1. 本章デハ次ノ方程式ヲ考ヘヨウ。

$$f^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\int_a^b f^{(k)}(x+t)\,d\varphi_k(t)\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

コヽニ、(a, b)ハ任意ノ有限區間デ，$\varphi_k(t)$ $(k=0, 1, 2, \cdots\cdots, n-1)$ ハ $[a, b]$ ニテ與ヘラレタ有界變分ノ函數トスル。

定理1ニナラッテ

$$f^{(n-1)}(x)=O(e^{A|x|})\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ト假定スル。

從ッテ $|f^{(k)}(x)|\leqq B_k e^{A'|x|}$ $(k=0, 1, 2, \cdots\cdots, n-1)$

ナル $A'>A$ ガトレル。

依ッテ

$$\left|\int_a^b f^{(k)}(x+t)\,d\varphi_k(t)\right|$$

$$\leqq B_k\int_a^b e^{A'(|x|+|t|)}\left|d\varphi_k(t)\right|$$

故ニ $\displaystyle\int_a^b e^{A'|t|}\left|d\varphi_k(t)\right|=C_k \quad (k=0,1,2,\cdots\cdots,n-1)$ ト

オクトキ

(1) カラ $\displaystyle\left|f^{(n)}(x)\right|\leqq\left(\sum_{k=0}^{n-1}B_kC_k\right)e^{A'|x|}.$

今 $\displaystyle B_n=\sum_{k=0}^{n-1}B_kC_k$ ナリト定義スルト

$$\left|f^{(n)}(x)\right|\leqq B_n e^{A'|x|}.$$

サテ (1) ヲ満足スル $f(x)$ ハ何回デモ微分出来ル; 今 $B_0, B_1,$ $\cdots\cdots\cdots, B_{n+m-1}$ ガ決定サレタトスレバ, (1) カラ

$$f^{(m+n)}(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\int_a^b f^{(m+k)}(x+t)\,d\varphi_k(t)$$

ナルガ故ニ

$$\left|f^{(m+n)}(x)\right|\leqq\left(\sum_{k=0}^{n-1}B_{m+k}C_k\right)e^{A'|x|}$$

ヲ得ル. 従ッテ一般ニ

$$B_m=\sum_{k=0}^{n-1}B_{m-n+k}C_k \qquad (m=n,n+1,\cdots\cdots\cdots)$$

ニヨツテ B_m ヲ決定スレバ

$$|f^{(m)}(x)| \leqq B_m e^{A'|x|}$$

ヲ得ル。シカモ上ノ定義カラ容易ニ計算出来ル様ニ

$$|B_m| < D^m \qquad (m=0,1,2,\text{------})$$

トナルヤウナ $D>0$ ガ存在スル。

ソレ故ニ (1) ヲ満足スル $f(x)$ ハ正則デアル, 依ッテ Taylor ノ展開ヲ用ヰテ

$$f^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\int_a^b f^{(k)}(x+t)\,d\varphi_k(t)$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\int_a^b\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{f^{(k+m)}(x)}{m!}t^m\right)d\varphi_k(t)$$

$$=\sum_{s=0}^{\infty}f^{(s)}(x)\left(\sum_{\substack{m+k=s\\k=0,1,2,\dots,n-1}}\frac{\int_a^b t^m d\varphi_k(t)}{m!}\right)\text{-------}(3)$$

今 $a_s=\sum_{\substack{m+k=s\\k=0,1,2,\dots,n-1}}\dfrac{\int_a^b t^m d\varphi_k(t)}{m!}$ $\qquad (s \neq n)$

$$a_n=\sum_{\substack{m+k=n\\k=0,1,2,\dots,n-1}}\frac{\int_a^b t^m d\varphi_k(t)}{m!}-1$$

トオケバ, (1) ハ

$$\sum_{s=0}^{\infty}a_s f^{(s)}(x)=0 \text{ ------------------}(4)$$

ナル無限次ノ微分方程式トナル。

然ルニ，$s>n$ トシ，$s=m+n-1$ トスルトキ

$$a_s=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(m+k)!}\int_a^b t^{m+k}d\varphi_{n-1-k}(t).$$

然ルニ

$$-\lg\left|\frac{1}{(m+k)!}\int_a^b t^{m+k}d\varphi_{n-1-k}(t)\right|$$
$$\cong s\lg s$$

依ッテ

$$\lim_{s\to\infty}\frac{s\lg s}{\lg\frac{1}{|a_s|}}=1$$

故ニ (4) ノ母函數ノ order ハ 1 デアル。

次ニ

$$\sqrt[s]{|a_s|}\leqq\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt[s]{\frac{1}{(m+k)!}\left|\int_a^b t^{m+k}d\varphi_{n-1-k}(t)\right|}$$
$$=O\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt[s]{\frac{b^s}{s!}\int_a^b\left|d\varphi_{n-1-k}(t)\right|}\right\}.$$

故ニ　$\overline{\lim_{s\to\infty}}\, s\sqrt[s]{|a_s|}<+\infty.$

依ッテ (4) ノ母函数ハ Maximal type ニハナラナイ。

故ニ Valiron ノ定理ガ應用出來ル。乃チ次ノ定理ヲ得ル。

定理 5.　(a,b) ヲ任意ノ有限區間トシ，$\varphi_k(x)$ ハ

$(a-\varepsilon,\ b+\varepsilon)$デ有界変分ノ函數トスル。然ルトキ

$$f^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\int_a^b f^{(k)}(x+t)\,d\varphi_k(t)$$

及ビ　$f^{(n-1)}(x)=O(e^{A|x|})$

ヲ満足スル $f(x)$ ハ常ニ正則デ且ツ次ノ形ニ書クコトガ出來ル。

$$f(x)=\sum_k P_k(x)\,e^{\lambda_k x}$$

コヽニ λ_k ハ

$$\lambda^n-\sum_{k=0}^{n-1}\lambda^k\int_a^b e^{\lambda t}\,d\varphi_k(t)=0$$

ノ根デ $|R(\lambda_k)|\leqq A$ ナルモノトシ $P_k(x)$ ハソノ次数ガ λ_k ノ multiplicity μ_k ヨリ高クナイ任意ノ polynome トシ更ニ

$$\frac{\mu_k}{\lambda_{\mu+\mu_k}}\longrightarrow 0$$

トスル。

2. (1)ヲ更ニ次ノ様ニ一般ニスル。

$$\sum_{\nu=0}^{n}p_\nu(x)\int_a^b f^{(\nu)}(x+t)\,d\varphi_\nu(t)=q(x)\cdots\cdots\cdots(1)$$

コヽニ、$\varphi_\nu(t)$ ハ $[a,b]$ デ有界変分ノ函数，$p_\nu(x)$ ハ高々 p 次ノ多項式デアルトス。$(\nu=0,1,2,\cdots\cdots,n)$

$q(x)$ ハ整函数デ指數ハ λ ヲコエナイ。即チ

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\sqrt[n]{g(x)}\right| \leqq s$$

トスル。

然ルトキニ，上ノ方程式ヲミタス、指數高々 s ナル整函数 $f(x)$ ヲ求メル問題ヲ考ヘヨウ。

$f(x)$ ガ高々指數 s ト云フ條件カラ

$$\int_a^b f^{(\nu)}(x+t)\,d\varphi_\nu(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(\nu+n)}(x)}{n!}\int_a^b t^n d\varphi_\nu(t)$$

トナル。何者，右辺ノ級數ニ於イテ

$$\sqrt[n]{\left|\frac{f^{(\nu+n)}(x)}{n!}\int_a^b t^n d\varphi_\nu(t)\right|}$$

$$\leqq\sqrt[n]{\frac{(s+\varepsilon)^n}{n!}KC^n}=O\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\right)$$

$$=O\left(\frac{1}{n}\right)$$

ダカラデアル。

ソレ故ニ、與ヘラレタ方程式ト無限次ノ微分方程式トハ

$$\sum_{\nu=0}^{n} p_\nu(x)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(\nu+n)}(x)}{n!}\int_a^b t^n d\varphi_\nu(t)=g(x) \quad\cdots\cdots(2)$$

有限次ノ指數ヲ有スル解 $f(x)$ ヲモトメル問題ニ関スル限リニ於イテハ全ク equivalent デアル。

(2) ニ関シテハ Perron ノ理論ガアル。コレヲ適用スルタメ

$$\sum_{m=0}^{\infty} f^{(m)}(x)\left\{\sum_{\nu=0}^{n}\frac{p_\nu(x)}{(m-\nu)!}\int_a^b t^{m-\nu}d\varphi_\nu(t)\right\}=g(x)$$

$$g_m(x)\equiv\sum_{\nu=0}^{n}\frac{p_\nu(x)}{(m-\nu)!}\int_a^b t^{m-\nu}d\varphi_\nu(t)$$

$$\equiv\sum_{r=0}^{p}\alpha_{m,r}x^r$$

ト置ク．

但シ，コヽニ $\alpha_{m,p}\neq 0$ ナル m ガ少クモ一ツハアルモノトス。

又　　$h_\lambda(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_{\nu,\lambda}x^\nu$　$(\lambda=0,1,2,\cdots\cdots,p)$

トオク，コレハ $|x|\leqq s$ デ正則デアル。$h_p(x)$ ハ恒等的＝0＝ナラナイデ，$|x|\leqq s$ デ m 個ノ0点ヲモツトス。

然ルトキ＝ハ，Perron ノ理論カラ次ノコトガ云ヘル。

定理 6.　$g(x)\equiv 0$ ノトキ＝ハ，與ヘラレタ方程式ハ $m-p+r$ 個ノ一次的＝独立ナ解ガアル。

コヽニ、r ハ

$$\sum_{\lambda=0}^{p}h_\lambda(x)\frac{d^\lambda\varphi(x)}{dx^\lambda}=0\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

ノ $|x|\leqq s$ ＝於ケル一次的＝独立ナ正則解ノ数トスル。

定理 7.　一般ノ場合　　解（勿論指数ハ s ヲコヘナイトス）ノ存在スルタメノ必要且ツ十分ナル條件ハ(3)ガ $|x|\leqq s$

デ正則解ヲモタヌコトナリ。乃チ

homogeneous equation

$$\sum_{\nu=0}^{n} p_\nu(x)\int_a^b f^{(\nu)}(x+t)\,d\varphi_\nu(t)=0$$

ガ $n-p$ 個ノ数ヲモツコトデアル。

コレヲ $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_{n-p}(x)$ トスレバ考ヘル方程式ノ一般解ハ、ソレノ特殊解ヲ $f_0(x)$ トスルトキ

$$f(x)=f_0(x)+\sum_{\nu=1}^{n-p} c_\nu f_\nu(x)$$

デ與ヘラレル。